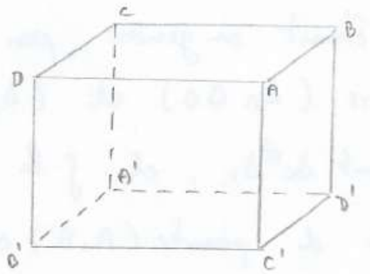
Ref: H262 Tome 1
Caldero

Développement : Groupe d'isométries du cube :

leçons 101, 104, 105, 181, 191

On considère C un cube régulier de $\mathbb{R}^3$, que l'on suppose centré en 0 (quitte à translater). Notons G (resp G^+) le groupe des isométries (resp directes) de $\mathbb{R}^3$ fixant C.

Théorème : On a $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_4$ et $G^+ \cong S_4$. De plus, les sous groupes de Sylow de G^+ se voient comme stabilisateurs de certaines droites remarquables de C.



Preuve :

On note $\Delta := \{\Delta_A ; \Delta_B ; \Delta_C ; \Delta_D\}$ l'ensemble des grands diagonals de C. Le groupe G étant constitué d'isométries affines, son action conserve les points extremaux, càd les sommets de C. De plus, 4 sommets distincts de C non coplanaires forment un repère affine de $\mathbb{R}^3$ donc une application affine est entièrement déterminée par son action sur les sommets de C. En particulier, les actions de G et G' sur les sommets de C sont fidèles.

Les segments diagonaux sont les segments de plus grande longueur dans C. Les éléments de G étant des isométries affines, l'image d'un segment diagonal par un élément de G est un segment diagonal (car une isométrie affine préserve les distances). Ainsi G agit sur Δ, d'où un morphisme $\varphi : G \to S_4$.

Calculons le noyau de φ : Soit $f \in \ker(\varphi)$. $[AA'] = f([AA']) = [f(A)f(A')]$ donc $f(A) \in \{A, A'\}$. De même, $f(B) \in \{B, B'\}$ etc...

- Si $f(A) = A'$, alors on a $f(B) = B'$ car f isométrie affine donc préserve les distances, et $[AB]$ et $[A'B]$ ne sont pas de même longueur ! Par le même argument, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$. L'action de f sur les sommets est celle de $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, donc $f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
- Si $f(A) = A$, alors $f(B) = B$, etc... et $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

↳ Ainsi $\ker \varphi = \{\pm \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\}$ et en particulier l'action de G^+ sur Δ est fidèle.

Montrons que φ est surjectif : S_4 étant engendré par (12) et (1234), il suffit de montrer que les permutations $(\Delta_A\, \Delta_B)$ et $(\Delta_A\, \Delta_B\, \Delta_C\, \Delta_D)$ sont atteintes.

- On pose $P = (DCD')$ le plan contenant Δ_C et Δ_D, et f la symétrie orthogonale de plan P, elle permute les couples de points (A, B') et (A', B), d'où $\varphi(f) = (\Delta_A\, \Delta_B)$.
- On pose $\mathcal{D}_1$ la droite passant par les milieux des faces $ABCD$ et $A'B'C'D'$, et g la rotation d'axe $\mathcal{D}_1$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a $\varphi(g) = (\Delta_A\, \Delta_B\, \Delta_C\, \Delta_D)$.

Ainsi nous avons une suite exacte courte $\{\pm 1\} \hookrightarrow G \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} S_4$. Cette suite est scindée à droite : En effet pour $\sigma \in S_4$, σ admet deux antécédents par φ qui sont f_1 et $-f_1$. Un seul de ces deux est une isométrie directe et on pose $\psi(\sigma)$ celui-ci. On obtient $\psi : S_4 \to G$, qui est un morphisme de groupe : $\forall \sigma, \sigma' \in S_4$, $\varphi(\psi(\sigma)\psi(\sigma')) = \varphi(\psi(\sigma)).\varphi(\psi(\sigma')) = \sigma\sigma'$ et $\varphi(\psi(\sigma\sigma')) = \sigma\sigma'$. Ainsi $\psi(\sigma\sigma') = \underbrace{\cancel{\psi\varphi}[\psi(\sigma).\psi(\sigma')]}_{= \psi(\sigma)\psi(\sigma') \leftarrow \text{car direct}}$ ~~et φ est "1"/compatibles~~. deux sont directs. (on utilise que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$). Ainsi $\psi : S_4 \to G$ est bien une section de G.

On a donc $G \cong \{\pm 1\} \rtimes \psi(S_4)$. Or $\psi(S_4)$ d'ordre 2 dans G donc $\psi(S_4) \trianglelefteq G$, d'où $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_4$.

De plus par construction, $\psi(S_4)$ est un sous groupe d'indice 2 dans G formé d'isométries directes : c'est donc G^+ exactement (pour raison de cardinalité). Par le théorème d'isomorphisme, on a $G^+ \cong S_4$.

G^+ est un groupe d'ordre 24 (car $G^+ \cong S_4$) donc possède $\left\{\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right.$ 2-Sylow et $\left\{\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right.$ 3-Sylow.

- Considérons l'action de G^+ sur C. Soit H le sous groupe des éléments fixant la droite Δ_A ponctuellement (point par point). Une isométrie directe fixant ponctuellement Δ_A est une rotation d'axe Δ_A, et compte tenu du fait que l'image de D doit être B ou C' (car A envoyé sur A), il ne reste que les angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. H admet donc 3 éléments et est un 3-sylow de G^+. Le même raisonnement sur les autres grandes diagonale nous donne 3 autre 3-Sylow.

- Pour les 2-Sylow, on considère D_1, D_2, D_3 les droites passant par les milieux des faces opposées de C. Le groupe G^+ agit sur ces droites de façon transitive (i.e. une seule orbite). Donc le stabilisateur d'une droite est un sous groupe d'ordre $\frac{24}{3} = 8$, par le lemme des orbites. C'est un 2-Sylow de G^{+*} qui en possède donc 3. ∎

*En effet, $8 = 2^3$ et $\frac{|S_4|}{|S|} = \frac{24}{8} = 3$, 3 étant premier avec 2.

Culture G :

Thm : Dans un cube, on peut inscrire 2 tétraèdres réguliers T_1 et T_2 dont les sommets sont tous distincts. (H2G2, tome 1, p. 366).

Ainsi G agit sur $\{T_1, T_2\}$ et le noyau de l'action est le stabilisateur du tétraèdre

$$1 \to Is(T_1) \hookrightarrow G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$$

On a $\left.\begin{matrix} G \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ Is(T_1) \cong S_4 \end{matrix}\right\}$ Ainsi $G \cong Is(T_1) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Si on restreint l'action on obtient la suite exacte

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Is(T_1)^+ \arrow[r, hook] & G^+ \arrow[r, two heads, "\sigma"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

où s section de σ à l'aide de la symétrie p.r. à O.
Ainsi $G^+ \cong Is^+(T_1) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ie. $S_4 \cong A_4 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.